



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**AS CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD
PARA O CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL E SUAS APLICAÇÕES**

LUANA DA SILVA SOUZA

João Pessoa - Paraíba
Agosto de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LUANA DA SILVA SOUZA

**AS CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD
PARA O CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL E SUAS APLICAÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do curso de Licenciatura em
Matemática da Universidade Federal da Paraíba
como requisito parcial para obtenção do título de
licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Rogéria Gaudencio do
Rêgo

João Pessoa - Paraíba
Agosto de 2014

Catalogação na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

S729c Souza, Luana da Silva.

As contribuições da Teoria dos Campos Conceituais de
Vergnaud para o conceito de número racional e suas aplicações /
Luana da Silva Souza. – João Pessoa, PB, 2014.

45 p. : il. Color.

Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade
Federal da Paraíba.

Orientadora: Profª Drª Rogéria Gaudencio do Rêgo.

.

1. Números racionais. 2. Teoria dos Campos Conceituais.
3. Resolução de problemas matemáticos. I. Título.

UFPB/BS-CCEN

CDU 511.14(043.2)

LUANA DA SILVA SOUZA

**AS CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD
PARA O CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL E SUAS APLICAÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Rogéria Gaudencio do Rêgo.

Aprovada em: ____/____/2014.

Conceito: _____

Nota: _____

BANCA EXAMINADORA

Prof^ª. Dr^ª. Rogéria Gaudencio do Rêgo - UFPB
(Orientadora)

Prof. Me. Antônio Sales da Silva - UFPB
(Avaliador)

Prof^ª. Dr^ª. Maria Lewtchuk Espindola - UFPB
(Avaliadora)

“O que eu faço é uma gota no meio de um oceano. Mas, sem ela, o oceano seria menor.”

(Madre Teresa de Calcutá)

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, por todas as conquistas por mim alcançadas até aqui. E, principalmente, por me permitir vivenciar este momento tão especial e único: a concretização de um sonho.

A minha mãe, Maria de Lourdes que nunca mediu esforços e que vivenciou junto comigo cada etapa desta conquista. E aos meus irmãos Rita de Cássia e Gustavo que de maneira especial estiveram sempre comigo.

A minha orientadora, Prof^ª. Dr^ª. Rogéria Gaudencio do Rêgo, por todo suporte me dado e por sua valiosa contribuição neste trabalho. Foi uma honra tê-la como orientadora.

A minha banca examinadora, Prof. Me. Antônio Sales da Silva e Prof^ª. Dr^ª. Maria Lewtchuk Espindola, obrigada pelas correções e sugestões. Com vocês aprendi muito durante estes anos de formação e sou muito grata pelo convívio enriquecedor.

Aos professores que para sempre carregarei como um grande exemplo de mestres e cujos ensinamentos irei levar por toda a vida, Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos, Prof^ª. Dr^ª. Valdenilza Ferreira da Silva, Prof. Me. João Batista Alves Parente e Prof^º Me. Edison Thadeu Bichara Dantas.

A minha amiga Bruna Pontes por acreditar em mim, mesmo quando eu não mais acreditava, também, por me apoiar e me incentivar constantemente a ir à luta e a nunca desistir. A Mariana Santos, Jefferson Silva e Ricardo Neves que de modo tão singelo contribuíram decisivamente, e cujas palavras de incentivo foram fundamentais.

Aos meus amigos do curso, pelas alegrias, tristezas e dores compartilhadas. Vocês marcaram minha vida de uma forma indescritível: Rosemary Gonçalves, Tiago Emanuel, Ivana Wanderley, Laise Alves, Adriano Narciso, Gustavo Arcanjo, Wilson Domingos e Aparecida Andrade.

E a todos que estiveram e estão tão próximos de mim, e que direta ou indiretamente contribuíram para realização deste sonho, obrigada!

RESUMO

Este trabalho compreende um estudo qualitativo de natureza analítica que teve como principal objetivo analisar o desempenho de alunos do Ensino Superior na resolução de problemas envolvendo Números Racionais na forma fracionária. Fundamentamos teoricamente nosso trabalho na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e nas contribuições de George Polya, quanto a Resolução de Problemas. Avaliamos, sob a ótica dos Parâmetros Curriculares Nacionais, os objetivos e os conteúdos referentes aos Números Racionais e, a partir deste, formulamos, aplicamos e analisamos um questionário investigativo que portava questões sobre a temática referida. Como resultado de nossa análise, concluímos que os alunos pesquisados mostram um desempenho muito abaixo do esperado, considerando que o universo destes é o dos recém ingressos no Curso de Matemática e que o instrumento de nossa coleta de dados foi elaborado com questões de nível fácil a médio, as quais exploravam os objetivos curriculares do Ensino Fundamental.

Palavras-Chave: Números Racionais; Teoria dos Campos Conceituais; Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This work comprises a qualitative study of analytical nature that aimed to analyze the performance of students in higher education when solving problems involving Rational Numbers in fraction form. Theoretically we based our work on Gérard Vergnaud's Conceptual Fields Theory and the contributions of George Polya on Problem-solving. We evaluated from the perspective of the National Curriculum Parameters, objectives and contents related to Rational Numbers, and from these, we formulated, applied and analyzed an investigative survey which carried questions on the subject mentioned. As a result, we concluded that the surveyed students show performances much lower than expected, considering that the universe of these students is that one of new arrivals in Mathematics Course, and the instrument of our data collection was designed with questions ranging from easy to medium level, which explored the curriculum goals of elementary school.

Keywords: Rational Numbers; Theory of Conceptual Fields; Problem-solving.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representação dos números racionais na reta	19
Figura 2: Questionário Investigativo (Questão 1)	30
Figura 3: Questionário Investigativo (Questão 2)	32
Figura 4: Questionário Investigativo (Questão 3)	34
Figura 5: Questionário Investigativo (Questão 4)	36
Figura 6: Questionário Investigativo (Questão 5)	38
Figura 7: Gráfico do Desempenho Geral dos Alunos	40

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Desempenho dos alunos na Questão 1.....	31
Tabela 2: Desempenho dos alunos na Questão 2.....	33
Tabela 3: Desempenho dos alunos na Questão 3.....	35
Tabela 4: Desempenho dos alunos na Questão 4.....	37
Tabela 5: Desempenho dos alunos na Questão 5.....	39

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	11
1.1.	JUSTIFICATIVA DA TEMÁTICA	11
1.2.	OS OBJETIVOS DA PESQUISA	14
1.2.1.	Objetivo Geral.....	14
1.2.2.	Objetivos Específicos.....	14
1.3.	A Metodologia da Pesquisa.....	15
1.3.1.	Os sujeitos da pesquisa	15
1.3.2.	Instrumento da coleta de dados	15
1.3.3.	Procedimentos da pesquisa	15
2.	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1.	OS NÚMEROS RACIONAIS – CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS E ENFOQUES	17
2.1.1.	Alguns enfoques sobre os racionais	18
2.1.1.1.	Enfoque Simbólico.....	19
2.1.1.2.	Enfoque Numérico	19
2.1.1.3.	Enfoque Geométrico	19
2.1.1.4.	Enfoque Algébrico	20
2.2	USO DAS FRAÇÕES NO COTIDIANO.....	20
2.2.1.	A razão	20
2.2.2.	A proporção	21
2.2.3.	A porcentagem	21
2.2.4.	A regra de três	21
2.3.	A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS (TCC) E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	22
2.3.1.	BREVE RECORTE SOBRE A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS.....	22
2.3.2.	A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	24
2.4.	OS NÚMEROS FRACIONÁRIOS NOS PCN.....	26
2.4.1.	Os PCN da 1ª a 4ª séries (atuais 2º ao 5º anos)	26
2.4.2.	Os PCN da 5ª a 8ª séries (atuais 6º ao 9º anos)	27

3.	APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DA NOSSA PESQUISA	29
3.1.	AVALIAÇÃO E CATEGORIZAÇÃO DAS RESPOSTAS	29
3.2.	ANÁLISE E RESULTADOS DA PESQUISA	30
3.2.1.	A Questão 1.....	30
3.2.1.1.	Resultados Quantitativos da Questão 1.....	31
3.2.1.2.	Principais Estratégias Adotadas na Resolução da Questão 1.....	31
3.2.1.3.	Principais Tipos de Erros Cometidos na Questão 1	32
3.2.2.	A Questão 2.....	32
3.2.2.1.	Resultados Quantitativos da Questão.....	33
3.2.2.2.	Principais Estratégias Adotadas na Resolução da Questão 2.....	33
3.2.2.3.	Principais Tipos de Erros Cometidos na Resolução da Questão 2	34
3.2.3.	A Questão 3.....	34
3.2.3.1.	Resultados Quantitativos da Questão 3.....	35
3.2.3.2.	Principais Estratégias Adotadas na Resolução da Questão 3.....	35
3.2.3.3.	Principais Tipos de Erros Cometidos na Resolução da Questão 3	36
3.2.4.	A Questão 4.....	36
3.2.4.1.	Resultados Quantitativos da Questão 4.....	36
3.2.4.2.	Principais Estratégias Adotadas na Resolução da Questão 4.....	37
3.2.4.3.	Principais Tipos de Erros Cometidos na Resolução da Questão 4	37
3.2.5.	A Questão 5.....	38
3.2.5.1.	Resultados Quantitativos da Questão 5.....	39
3.2.5.2.	Principais Estratégias Adotadas na Resolução da Questão 5.....	39
3.2.5.3.	Principais Tipos de Erros Cometidos na Resolução da Questão 5	39
3.3.	CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O CONJUNTO DE QUESTÕES DO INSTRUMENTO	40
	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	43
	REFERÊNCIAS	44

1. INTRODUÇÃO

1.1. JUSTIFICATIVA DA TEMÁTICA

O presente estudo tem como temática os números racionais, na forma fracionária. Não foi nosso objetivo tratar de seu ensino, sendo nosso foco relacionado ao domínio desse conteúdo, que é trabalhado em diversos anos de escolaridade do Ensino Fundamental, considerando-se diferentes níveis de aprofundamento. Os participantes de nossa investigação foram estudantes do Ensino Superior, mais precisamente, do Curso de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, Campus de João Pessoa.

O estudo dos números racionais justifica-se não apenas por sua associação a situações reais do cotidiano, mas, também, por sua conexão com outros conteúdos matemáticos importantes para a participação social ativa do aluno, como Porcentagem, Razão e Proporção e Probabilidade, dentre outros. Seu domínio, em particular, fornece as ferramentas necessárias para a resolução de situações-problema envolvendo o conteúdo foco de nossa investigação, particularmente, seus diversos significados são explorados durante seu ensino, bem como sua relação com outros conteúdos matemáticos.

Considerando-se a diversidade de conceitos matemáticos estudados na Educação Básica, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática defendem que, ao passo que os alunos relacionam ideias matemáticas entre si, é possibilitado aos mesmos o reconhecimento de propriedades pertinentes aos conteúdos matemáticos, tais como proporcionalidade, igualdade, composição, decomposição, inclusão. O estabelecimento de relações dessa natureza permite que os alunos compreendam efetivamente os conteúdos matemáticos apresentados, uma vez que os conteúdos abordados isoladamente não constituem uma ferramenta eficaz tanto para a aprendizagem, quanto para a construção de novos conceitos e a resolução de problemas (BRASIL, 1998).

Compreendemos que essa mesma concepção deva ser estendida para o que se ensina/aprende no Ensino Superior, no campo da Matemática, presente em disciplinas ofertadas para Cursos das Ciências Exatas, como as Engenharias e as Ciências Sociais Aplicadas, como Economia, Administração e Ciências Contábeis, dentre outros Cursos de Graduação.

Entretanto, a realidade educacional conserva uma série de práticas que vão de encontro às metas almejadas. De acordo com os PCN, a postura frequentemente adotada por professores no ensino de Matemática remete à exposição oral do conteúdo, partindo de

definições, propriedades e exemplos, seguidos de exercícios de fixação, considerando-se, desta forma, que a reprodução correta de um modelo apresentado seja garantia de que ocorreu aprendizagem (BRASIL, 1998). Desta forma, através desse modelo de ensino, desenvolve-se, e é cobrada do aluno, mais a reprodução de definições e procedimentos, que nem sempre são compreendidos pelos alunos, do que a efetiva aprendizagem do que se estuda, inclusive habilitando-os a utilizarem os conteúdos trabalhados em contextos diferentes daqueles em que foram apresentados. Ou seja, o que se observa, é que essa prática de ensino se mostra ineficaz, uma vez que a reprodução correta pode ser simplesmente uma indicação de que o aluno memorizou e/ou mecanizou um procedimento, todavia, não implica que ele tenha aprendido o conteúdo, nem tampouco, que saiba utilizá-lo em outros contextos (BRASIL, 1998).

Percebe-se com relativa facilidade essa ineficiência quando observamos os resultados de exame de larga escala de desempenho em Matemática, nacionais (Prova Brasil, Exame Nacional do Ensino Médio) ou internacionais (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – *PISA*), dos quais participam nossos alunos, de todos os níveis de escolaridade. Eles apontam para um desempenho, em alguns casos, bem abaixo do esperado para o nível de escolaridade avaliado, e, em particular, indicam um conhecimento pouco significativo dos números racionais.

De acordo com os PCN dirigidos aos quatro anos finais do Ensino Fundamental, embora os Números Racionais sejam conteúdos desenvolvidos desde os ciclos iniciais, muitas vezes, os alunos chegam aos ciclos finais sem compreender ou atribuir significado a esse tipo de número (BRASIL, 1998). Defende-se que se com a realização de operações básicas envolvendo os números racionais, os alunos apresentam dificuldades, elas podem ser ainda maiores caso o aluno seja confrontado com uma situação problematizadora e/ou contextualizada, onde ele tenha que manifestar seu conhecimento sobre números dessa natureza, aliado à sua capacidade cognitiva de leitura e interpretação.

Segundo o mesmo documento, uma das possíveis explicações para essas dificuldades reside no fato de que, ao estudarem os números racionais, determinadas formas de raciocínio elaboradas pelos alunos para o trabalho com números naturais não podem ser aplicadas com esse novo tipo de número e é preciso promover o rompimento de certezas em relação a conhecimentos já construídos. As ideias envolvidas na construção de conceitos sobre os números naturais, na forma de propriedades gerais, quando levadas aos racionais, podem provocar vários obstáculos. Os PCN apontam, por exemplo, o fato de um mesmo número fracionário poder ser representado de inúmeras formas: $\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{8}{20}, \dots$; a comparação de dois

números fracionários como $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, que parece contradizer o fato de que $3 > 2$. Tomando as operações entre dois inteiros positivos, a soma e o produto dos dois sempre resultam em um inteiro maior que ambos, mas no caso dos racionais há exceções, como, por exemplo, no produto $9 \times \frac{1}{3}$, cujo resultado, 3, é maior que a segunda parcela do produto mas menor que a primeira (BRASIL, 1998).

Levando em consideração o que foi apresentado, o estudo que apresentamos neste trabalho versa acerca da identificação do nível de compreensão do conteúdo dos Números Racionais (na forma fracionária), de alunos do ensino superior, quando da resolução de situações-problema que exigem conhecimentos referentes ao elemento supracitado.

O interesse em estudar essa temática nasceu da observação cotidiana das dificuldades apresentadas por alunos do Ensino Fundamental II (6º, 7º, 8º e 9º ano) e também do Ensino Médio, durante o período em que desenvolvemos atividades de investigação em sala de aula vinculadas aos Estágios Supervisionados.

As indagações, bem como as dificuldades demonstradas pelos alunos, naquelas ocasiões, quando o assunto abordado envolvia números fracionários, chamaram nossa atenção. Dentre as dificuldades apresentadas, destacam-se as de operar e resolver problemas que envolvem números na forma fracionária, o que resultava, muitas vezes, em conclusões erradas e/ou equivocadas.

Os conhecimentos fundamentais sobre os números racionais que foram observados nesta pesquisa compreendem a operacionalização e a exploração do uso de números fracionários em diferentes contextos; a capacidade de análise, de interpretação e de resolução de problemas; e o uso e manipulação de operações com esses números, envolvendo razão, proporcionalidade, porcentagem e regra de três para a resolução de situações-problema. Consideramos, ainda, operações sobre as frações que compreendem a conversão, simplificação, comparação e redução ao mesmo denominador.

Nossa justificativa quanto a adoção da investigação dos conceitos que envolvem a noção de Número Racional, apoia-se nas contribuições de Gérard Vergnaud e nos estudos da Teoria dos Campos Conceituais¹, bem como nas pesquisas e contribuições de outros pesquisadores. Essas contribuições serão apresentadas em nossa Fundamentação Teórica.

¹ Gérard Vergnaud, Universidade de Paris, França, *Centre Nationale des Recherches Scientifiques* (CNRS). A partir daqui, denotaremos a Teoria dos Campos Conceituais simplesmente por TCC.

Como estratégia para o levantamento de dados que deu suporte à nossa pesquisa, elegemos a resolução de problemas. Sobre a resolução de problemas, destacamos os trabalhos de Polya (1995) do qual também trataremos adiante, em nossa Fundamentação Teórica.

Tendo em vista que, muitas vezes, os conhecimentos efetivamente elaborados nos Ensino Fundamental e Médio permanecem ao longo de toda a formação acadêmica, dados sob a forma de uma cadeia de conhecimentos conexos, resolvemos investigar como tais conhecimentos se apresentam em alunos do ensino superior, que continuam lidando com estruturas matemáticas básicas ao longo de sua formação.

Para orientar nossa investigação, delimitamos a seguinte questão: *como é o desempenho de estudantes do Ensino Superior na resolução de problemas envolvendo números fracionários?*

1.2. OS OBJETIVOS DA PESQUISA

Considerando a questão de investigação explicitada, nosso trabalho teve como Objetivo central o que segue.

1.2.1. Objetivo Geral

Avaliar o desempenho de alunos do Ensino Superior ao resolverem problemas envolvendo números racionais.

Para alcançarmos nosso Objetivo Geral, perseguimos os Objetivos Específicos abaixo elencados.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Elaborar uma lista de problemas envolvendo números fracionários, para uso na investigação;
- Aplicar a lista a um grupo de alunos do Ensino Superior;
- Categorizar as respostas dos alunos segundo critérios estabelecidos *a posteriori*;
- Levantar as estratégias utilizadas na resolução dos problemas;
- Identificar e discutir as dificuldades apresentadas pelos alunos durante a resolução das situações propostas.

1.3. A Metodologia da Pesquisa

A pesquisa de campo foi previamente planejada, de modo que permitisse uma efetiva coleta e compreensão dos dados. Estabelecemos o tema e o público alvo e, a partir destes, desenvolvemos nossa proposta de investigação. Posteriormente definimos nosso instrumento para a coleta de dados, optando por um questionário.

O nosso trabalho consistiu de uma pesquisa do tipo descritivo-analítica, possibilitada através de um estudo de campo. Fizemos uso em nossa pesquisa de uma análise qualitativa, visto que buscamos uma maior compreensão dos fatores que permeiam a resolução dos problemas propostos.

1.3.1. Os sujeitos da pesquisa

Participaram da nossa pesquisa, 25 alunos recém ingressos no Curso de Matemática, nas modalidades de Licenciatura e Bacharelado, dos turnos da manhã e noite, da Universidade Federal da Paraíba, Campus de João Pessoa.

1.3.2. Instrumento da coleta de dados

Utilizamos um questionário investigativo como instrumento para a coleta de dados da nossa pesquisa. Tal questionário, composto por cinco questões subjetivas, apresentou questões problematizadoras e/ou contextualizadas versando sobre diversas possibilidades de se trabalhar os números racionais. O questionário foi planejado de maneira a contemplar diferentes formas de representação dos números racionais, apresentadas no Capítulo Teórico deste trabalho.

1.3.3. Procedimentos da pesquisa

Aplicamos o questionário investigativo a uma turma de alunos recém ingressos no Curso de Matemática, da UFPB, dos turnos da manhã e noite. A pesquisa, de caráter anônimo e individual, não permitiu qualquer tipo de consulta a material impresso, equipamentos eletrônicos ou o auxílio de colegas e professores. Os alunos dispuseram de 60 a 90 minutos para a realização do questionário.

Optamos por uma análise qualitativa da nossa pesquisa, classificando as respostas obtidas, de acordo com as seguintes categorias: Resposta Errada (RE); Resposta Correta (RC); Categoria Residual (CR) – compreendida pelas questões em branco ou respondidas de forma incompleta.

Como não pretendíamos nos ater apenas ao aspecto do número de acertos ou erros, buscamos identificar as estratégias utilizadas pelos alunos e os principais tipos de erros presentes nas soluções.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No presente Capítulo fazemos uma breve exposição acerca dos números racionais, sob o ponto de vista histórico, tecendo comentários sobre seu surgimento e do emprego destes números em nosso cotidiano.

Apresentamos, ainda, as teorias e fundamentações teóricas que serviram de sustentação às práticas adotadas para o desenvolvimento da nossa pesquisa, sendo elas, os trabalhos de Gérard Vergnaud e sua Teoria dos Campos Conceituais e a as contribuições de Polya na resolução de problemas, bem como os trabalhos de Moreira (2002), Mendes (2009), Silva (1997) e Magina e Campos (2008).

Trazemos também a função que os números fracionários desempenham sob o ponto de vista dos PCN, bem como os conteúdos almejados em cada fase do ciclo da educação básica e suas correspondentes competências esperadas.

2.1. OS NÚMEROS RACIONAIS – CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS E ENFOQUES

A civilização egípcia, por ser localizada numa região desértica, se estabeleceu às margens do rio Nilo. A população que ali residia tinha suas terras marcadas pelos agrimensores² do faraó, mas, nos períodos de cheia, as águas do rio inundavam essas terras levando parte das marcações e deixando o solo fertilizado, permitindo o desenvolvimento da agricultura. Com a diminuição do nível das águas era necessário refazer as marcações das terras, para isso, eram utilizadas marcações (nós) em uma corda.

Tomando a unidade de medida como sendo os espaços iguais entre dois nós em uma corda, era possível verificar quantas vezes aquela unidade “cabia” nas laterais do terreno. Entretanto, raramente era possível determinar esse valor, pois o número que o representava não era um número inteiro. A partir de eventos dessa natureza, tornou-se necessária a criação de novas unidades de medida, os números racionais, que podem ser representados na forma de frações ou de números decimais.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais,

² Os agrimensores são profissionais que realizam as medições de terrenos. Os agrimensores dos faraós eram profissionais do reino cuja tarefa era avaliar os prejuízos das cheias e restabelecer as fronteiras entre as diversas posses.

[...] a história dos números está ligada às das necessidades e preocupações de povos que, ao buscar recensear seus membros, seus bens, suas perdas, ao procurar datar a fundação de suas cidades e as suas vitórias, usando os meios disponíveis, construíram interessantes sistemas de numeração. (BRASIL, 1998, p.96).

Registros históricos apontam, além da necessidade de medição, para a necessidade de dividir e distribuir bens materiais entre herdeiros. Os babilônios, por exemplo, adotaram o sistema de base sexagesimal (base 60) suméria, cuja razão é até hoje desconhecida. “Alguns sugeriram ser o resultado da fusão de dois sistemas anteriores, com bases 5 e 12, [...]” (BELLOS, 2011, p.65).

A preferência pela base 12 pode ser justificada pelo fato de que “embora a base 12 sem dúvida facilite o aprendizado da tabuada, sua maior vantagem é a forma como elimina frações.” (BELLOS, 2011, p.60) ³.

Antes, porém, da formalização do conjunto dos números racionais, tal qual nós o conhecemos atualmente, foi necessário percorrer um longo trajeto que agregou a contribuição de muitas civilizações. Desde a antiguidade, quando os egípcios se utilizavam de frações de numerador unitário, passando por Eudóxio de Cnidos, discípulo de Platão, e sua reformulação da Teoria das Proporções e por Diofanto de Alexandria, responsável por introduzir uma notação simbólica para as frações, representando o denominador abaixo do numerador. ⁴

Mas, foi somente através de trabalhos de Richard Dedekind (1831 – 1916) publicados entre 1870 e 1880 e por meio do conceito que ficou conhecido como Corte de Dedekind que foi definida mais especificamente uma concepção aritmética de número irracional. Assim, as relações de ordem e as operações aritméticas puderam ser assumidas para todos os reais, da mesma forma como são admitidas válidas para os processos racionais (DANTZIG, 1970).

2.1.1. Alguns enfoques sobre os racionais

Diante do que foi evidenciado historicamente, resolvemos apresentar o conteúdo eleito sob as seguintes vertentes: simbólica, numérica, geométrica e algébrica. Estas formas de tratar os números racionais estarão presentes ao longo da nossa pesquisa.

³ Uma discussão mais ampla sobre este assunto pode ser vista em: ROQUE, Tatiana. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

⁴ Para uma visão mais profunda sobre a construção histórica dos números racionais, consultar o capítulo 2 da dissertação de mestrado de Maria José Ferreira da Silva: *Sobre a introdução do conceito de número fracionário*, PUC de São Paulo, 1997.

2.1.1.1. Enfoque Simbólico

O conjunto dos números racionais, \mathbb{Q} , é constituído pelo conjunto dos números escritos na forma $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Em símbolos: $\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\right\}$.

A representação do conjunto dos racionais pela letra \mathbb{Q} é proveniente da palavra *quociente*. A denominação racional pode ser explicada mediante o fato de que a fração $\frac{a}{b}$ pode ser entendida como a razão entre os inteiros a e b . A restrição $b \neq 0$ é condição necessária, pois $\frac{a}{b}$ não possui significado se $b = 0$.

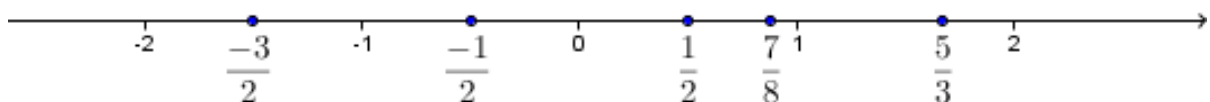
2.1.1.2. Enfoque Numérico

Consideremos o conjunto dos naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Expandindo-o obtemos os inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Note que todo número inteiro é também um número racional, pois pode ser escrito na forma de uma fração, $\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b}, \text{ com } a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\right\}$. Por exemplo, $-3 = \frac{-6}{2}$, $2 = \frac{10}{5}$, $0 = \frac{0}{5}$ são números racionais. Também são racionais: $\frac{1}{2}$, $\frac{-4}{3}$, $5\frac{2}{3}$ e os racionais na forma decimal: 0,5; -0,625; $0,\bar{3}$.

2.1.1.3. Enfoque Geométrico

A disposição dos números na reta está relacionada à medição. Na reta, podemos dispor de infinitos números racionais, e entre quaisquer dois racionais, dispomos de mais uma infinidade deles (Figura 1).

Figura 1: Representação dos números racionais na reta



Fonte: Elaborada pela autora, 2014.

2.1.1.4. Enfoque Algébrico

Os números racionais, assim como os naturais e os inteiros, podem ser trabalhados de acordo com as noções de igualdade, ordem e as quatro operações básicas, adição, subtração, multiplicação e divisão.

- Igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $ad = bc$.
- Ordem: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ se, e somente se, $ad < bc$, desde que bd seja positivo.
- Adição e Subtração: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$.
- Multiplicação: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
- Divisão: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{\frac{c}{d}}$.

Considerando os possíveis enfoques aqui apresentados em relação aos números fracionários, de modo resumido, destacaremos, em seguida, suas aplicações.

2.2 USO DAS FRAÇÕES NO COTIDIANO

Diariamente somos convidados a lidar com números e, em alguns casos com os números racionais, representados na forma de fração ou decimal, que também são utilizados por nós cotidianamente, seja ao lidarmos com dinheiro ou com medidas, seja na cozinha, no preparo de alguma receita.

Um problema organizado em estruturas fracionárias pode se apresentar sob diversas óticas, dentre algumas delas, destacamos as que seguem.

2.2.1. A razão

A razão pode ser definida como uma relação entre duas grandezas de mesma unidade de medida. Conceitualmente, a razão entre a e b é definida como o quociente de a por b , $b \neq 0$. Em símbolos: $\frac{a}{b}$.

Usamos razão para representar divisões inteiras, como, por exemplo, seis reais para três pessoas, $\frac{6}{3} = 2$ reais. Bem como quantidades “quebradas”, ou partes de um todo. Por

exemplo, dividindo cinco bombons entre duas pessoas, onde cada uma receberá $\frac{5}{2}$ (cinco meios) de bombons; ou uma barra de chocolate entre quatro pessoas, resultando em $\frac{1}{4}$ (um quarto) da barra.

2.2.2. A proporção

A proporção é a igualdade entre duas razões. Dizemos que a , b , c e d formam uma proporção, se a razão $\frac{a}{b}$ for igual à razão $\frac{c}{d}$. Ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Aos termos b e c chamamos de *meios*, já os termos a e d chamamos de *extremos*.

É comum utilizarmos proporção, por exemplo, na culinária. Ao fazer um bolo com 4 porções, um bolo com o dobro de porções terá o dobro de ingredientes em quantidades proporcionais. O mesmo ocorre na construção civil, para fazer a argamassa, o pedreiro tem que colocar quantidades proporcionais de cimento, areia e cal, para que a massa mantenha suas qualidades.

2.2.3. A porcentagem

Toda razão de denominador 100 pode ser expressa através de porcentagem. A porcentagem, indicada pelo símbolo % – lê-se “por cento”, significa dividir por cem. Se tivermos $\frac{3}{100}$ ou 0,03, teremos então, 3%.

A porcentagem é comumente utilizada no meio financeiro e comercial, principalmente por bancos e lojas. Atrelada a ela estão os juros, lucros, prejuízos, descontos, entre outras possibilidades.

2.2.4. A regra de três

A regra de três é um processo que nos permite encontrar um valor a partir de outros três, desde que as grandezas envolvidas sejam diretamente ou inversamente proporcionais, respectivamente, *regra de três simples direta* ou *regra de três simples inversa*. Nos casos em que queremos determinar um valor a partir de três, cinco ou mais valores usamos a regra de três composta, que pode conter grandezas direta ou indiretamente proporcionais no mesmo problema.

Em seguida, tratamos da principal teoria que nos possibilitou dar sustentação aos argumentos e reflexões quanto ao ensino-aprendizagem dos números racionais na forma fracionária.

2.3. A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS (TCC) E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Faremos neste tópico um breve estudo sobre as duas principais teorias em que se fundamenta toda a nossa pesquisa: a Teoria dos Campos Conceituais e a Resolução de Problemas.

2.3.1. BREVE RECORTE SOBRE A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Tendo como precursor Jean Piaget (1896 – 1980), a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) parte da premissa de que o conhecimento está organizado em campos de conceitos, ou seja, o conhecimento é uma reunião das informações, estruturas, conceitos, relações, conteúdos, técnicas, adquiridas através da aprendizagem, da experiência e da prática.

A Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitivista, que busca propiciar uma estrutura coerente e alguns princípios básicos ao estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas, sobretudo as que dependem da ciência e da técnica. (VERGNAUD, *apud* ZANELLA *et al.*, 2013, p.4).

Um campo conceitual pode ser definido, segundo Vergnaud, como um conjunto de problemas e/ou situações que para a execução de uma solução particular necessita de procedimentos, métodos, conceitos, conhecimentos e representações que deverão estar intimamente relacionados entre si, contribuindo assim, para uma construção efetiva do saber.

Para Vergnaud, um conhecimento conceitual deve ocorrer a partir de *situações* que permitam a formação, o desenvolvimento, a investigação e constatação dos conceitos, atribuindo, desta forma, algum significado aos mesmos. Propriedades, objetos, estruturas e relações matemáticas que permitem a análise e o domínio das situações constituem os *invariantes*. As *representações* de caráter simbólico são usadas para descrever e representar os invariantes. Estes três componentes – situações, invariantes e representações, compõem a terna que possibilita a elaboração de um conceito, na TCC (SANTOS *apud* RIBEIRO, 2010).

Sobre os invariantes, deve-se destacar que estes possam se apresentar sob dois aspectos: os invariantes explícitos, em que o aluno utiliza-se de todo conhecimento que lhe é cabível e de maneira consciente durante os processos cognitivos; e os invariantes implícitos, onde o aluno também utiliza-se de seu conhecimento, só que sem saber por quais razões faz uso deles.

Este fato é perfeitamente justificável, pois, na Matemática é comum que, ao apresentarmos novos conceitos, estes venham acompanhados de definições que generalizam a natureza do objeto. Dessa forma, contribui-se diretamente para uma aprendizagem por reprodução, uma vez que, os alunos não desenvolvem nenhuma relação entre as propriedades e as características do conceito com a realidade em que esse objeto está inserido.

Ao contrário do que se possa supor a TCC não é uma teoria de conceitos formalizados, ele se trata de uma teoria psicológica, pois se preocupa com a formação e com o desenvolvimento de conceitos, uma vez que, permite que estudemos as relações entre a conceitualização do real e os conceitos dos conhecimentos envolvidos. Neste processo são estudadas as construções, rupturas e as reconstruções do conhecimento. Observa-se, desta forma, que os conhecimentos envolvidos não podem ser construídos em um curto espaço de tempo, uma vez que uma aprendizagem significativa requer a apropriação do saber em todos os seus níveis de complexidade (MOREIRA, 2002).

As pesquisas de Vergnaud têm um enfoque maior sobre os campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas. Entretanto, a TCC não se limita apenas ao estudo destas estruturas, muito menos ao campo da Matemática. Várias são as áreas de conhecimento em que podemos estudar os conceitos sob a ótica desta teoria, por exemplo, na Física, os conceitos de Energia e Eletricidade são de difícil compreensão, supomos que sua aprendizagem não seja imediata e, por isso, mesmo não devem ser vistos como conceitos isolados. Na Biologia, temos os conceitos de reprodução vegetal que muito difere da reprodução animal à qual estamos habituados (MOREIRA, 2002).

Os problemas ou situações matemáticas apresentadas aos alunos podem admitir relações entre o saber empírico e o saber abstrato, desde que as implicações envolvidas forneçam uma cadeia de conceitos lógicos que façam sentido ao aluno. Estas situações, por sua vez, podem ser mais efetivas se lançadas na forma de Resolução de Problemas, Modelagem Matemática ou alguma outra técnica didática que forneça os elementos necessários ao desenvolvimento de conceitos.

Visando permitir diversas situações de investigação que apresentassem vários níveis de complexidades, e uma ligação entre os conceitos abstratos (no que se refere ao uso de

representações e de invariantes) com a conceitualização do real (situações), adequamos à nossa pesquisa a metodologia da Resolução de Problemas.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais,

[U]m conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular. (BRASIL, 1998, pg. 41).

Ou seja, no ensino de um conceito, é fundamental que sejam proporcionadas experiências não apenas de diversas formas de apresentação e representação desse mesmo conceito, mas, também, envolvendo a relação do conceito em tela com outros que possam ser a ele associados. Além disso, é fundamental que o professor compreenda que o processo demanda tempo, que varia de aluno para aluno, dependendo do conhecimento que ele já possui e das experiências de ensino que já vivenciou.

Considerando a importância de o aluno elaborar um conceito na perspectiva construtivista, que implica que ele possa resgatá-lo, mesmo que a aprendizagem tenha ocorrido há algum tempo e saiba aplicá-lo em outros contextos que não apenas os que lhe foram apresentados inicialmente, que aliamos nossa investigação à metodologia da Resolução de Problemas matemáticos, da qual tratamos em seguida.

2.3.2. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas é uma metodologia de ensino de Matemática que, como o nome sugere, visa o desenvolvimento das estruturas cognitivas dos alunos por meio da solução de situações-problema.

A resolução de problemas se opõe ao ensino memorístico e totalmente expositivo, pois viabiliza o desenvolvimento de habilidades, da reflexão e do questionamento. Incita o aluno a pensar por si próprio, a levantar hipóteses, testá-las, defender sua opinião, discutir ideias e evoluir seu senso crítico. (MENDES, 2009).

Desse modo, a concepção de resolução de problemas de que tratamos, difere do que habitualmente se referem alguns professores da Educação Básica, no modelo de ensino que segue sempre a mesma direção, no ensino de conteúdos matemáticos: a apresentação de um conjunto de definições e exemplos e a proposição do que denominam de problemas de aplicação, que, em muitos casos, resumem-se a exercícios de fixação de regras e fórmulas.

Defende-se a resolução de problemas como estratégia de ensino-aprendizagem, por acreditar que ela possibilite aos alunos uma aquisição do significado dos conhecimentos matemáticos, através do estímulo e do desafio à resolução de problemas. (BRASIL, 1998).

Do ponto de vista dos educadores, a resolução de problemas possibilita que os alunos utilizem seus conhecimentos e ampliem sua capacidade de gerir informações, na busca pela solução do problema proposto. Desta forma, possibilita-se que os alunos ampliem, não somente os conhecimentos matemáticos envolvidos no processo de solução, mas, também, a própria ideia do conceito de problema, uma vez que este não tem sido empregado de maneira adequada ao ensino, sendo utilizado apenas como uma forma de fixar os conhecimentos adquiridos pelos alunos.

Os PCN reforçam essa perspectiva do uso da resolução de problemas como medida de ensino e aprendizagem ao defenderem que conceitos, ideias e métodos matemáticos devam ocorrer através da Resolução de Problemas em que os alunos precisem desenvolver algum tipo estratégia para solucioná-los (BRASIL, 1998).

O procedimento geral para resolução de problemas matemáticos foi descrito por Polya, ainda na década de 1960, quando publicou seu livro traduzido no Brasil como “A arte de resolver problemas”. De acordo com Polya (1995), é possível estabelecer uma sequência de passos que nos permitem realizar a solução de um problema de maneira eficaz, o que foi denominado, posteriormente, como Heurística de Polya:

- Passo 1. Compreenda o problema, tenha em mente o que se pede, que dados se tem e qual é a condicionante;
- Passo 2. Estabeleça um plano que lhe permita realizar todas as etapas da solução do problema;
- Passo 3. Execute o plano estabelecido, em todos os seus níveis de complexidade;
- Passo 4. Faça um retrospecto. Retome o problema inicial fazendo pontes entre os caminhos percorridos, desta forma, o conhecimento produzido até aqui pode ser melhor consolidado.

É importante ressaltar que, para executar estes passos com sucesso, é necessário propor a execução de um número significativo de problemas sobre os mais variados temas. Quanto mais o aluno experimentar diferentes situações, mais ele estará apto a resolvê-los de maneira significativa.

No que tange à resolução de problemas envolvendo números fracionários, os trabalhos de Magina *et al* (2008) e Silva (1997) nos mostram que representar frações na forma

quociente, parte/todo e razão é muito comum, mas que apresentar estes conceitos, por exemplo, na forma de problemas pode contribuir muito mais para a apropriação dos mesmos, pelos alunos.

2.4. OS NÚMEROS FRACIONÁRIOS NOS PCN

Neste item apresentamos as propostas dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o conteúdo dos números racionais no Ensino Fundamental, considerando os dois documentos dirigidos a esse nível de escolaridade.

2.4.1. Os PCN da 1ª a 4ª séries (atuais 2º ao 5º anos)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática voltado para os quatro primeiros anos do Ensino Fundamental indicam como um dos objetivos para o segundo ciclo (3ª e 4ª Séries – correspondentes aos atuais 4º e 5º Anos), sobre os números fracionários, que o aluno seja capaz de “[C]onstruir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social” (BRASIL, 1997, p.55).

Os conteúdos conceituais e procedimentais relacionados aos Números Naturais, Sistema de Numeração Decimal e Números Racionais para o ciclo citado, quanto aos racionais na forma fracionária, destacados no texto dos PCN são:

- Reconhecimento de números naturais e racionais no contexto diário.
- Leitura, escrita, comparação e ordenação de representações fracionárias de uso freqüente.
- Reconhecimento de que os números racionais admitem diferentes (infinitas) representações na forma fracionária.
- Identificação e produção de frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas.
- Exploração dos diferentes significados das frações em situações-problema: parte-todo, quociente e razão.
- Observação de que os números naturais podem ser expressos na forma fracionária. (BRASIL, 1997, p.59)

O mesmo documento informa ainda que é a partir deste ciclo que são apresentados aos alunos situações-problema cujas soluções não podem ser obtidas no conjunto dos Números Naturais. Este fato permite uma aproximação da noção de Número Racional possibilitada

através da compreensão de sua representação e dos conceitos de quociente, parte-todo e razão (BRASIL, 1997).

Com base nos PCN, o domínio dos conteúdos dos números fracionários deve habilitar o aluno ao desenvolvimento das seguintes competências:

- Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações envolvendo números naturais e racionais.
- Reconhecimento de que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação e de que diferentes operações podem resolver um mesmo problema (BRASIL, 1997, p. 59).

Em vista do que foi apresentado, espera-se que o aluno, ao final deste ciclo, tenha a capacidade de utilizar seus conhecimentos de número racional pra resolver situações-problema, atribuindo significado às operações envolvidas e valendo-se de estratégias pessoais de solução, e que seja capaz de justificar os processos de solução envolvidos na solução proposta.

2.4.2. Os PCN da 5ª a 8ª séries (atuais 6º ao 9º anos)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática voltados para os últimos quatro anos do Ensino Fundamental objetivam para o terceiro ciclo (3ª e 4ª Séries – correspondentes aos atuais 4º e 5º Anos), em relação ao conteúdo citado, que o aluno seja capaz de “[R]esolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e a partir delas ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação” (BRASIL, 1998, p. 64).

Sobre os conceitos e procedimentos referentes aos Números e Operações na forma fracionária, os PCN destacam:

- Reconhecimento de números racionais em diferentes contextos – cotidianos e históricos – e exploração de situações-problema em que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador.
- Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros e racionais, reconhecendo que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação e que eventualmente diferentes operações podem resolver um mesmo problema;
- Resolução de situações-problema que envolvem a idéia de proporcionalidade, incluindo os cálculos com porcentagens, pelo uso de estratégias não-convencionais (BRASIL, 1998, p.71 e 72).

Ao final do quarto ciclo, os PCN ressaltam, além dos conteúdos objetivados em destaque, os que se seguem:

- Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais aproximados por racionais;
- Resolução de problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais por meio de estratégias variadas, incluindo a regra de três (BRASIL, 1998, p. 87).

Desta forma, somos levados a concluir que, ao término dos ciclos do Ensino Fundamental, os alunos devem ter pleno domínio e compreensão dos números fracionários em suas mais variadas formas, além de estarem aptos a solucionar problemas valendo-se de estratégias pessoais, bem como de conceitos e métodos próprios dos conteúdos, ao qual nos aferimos, em suas formas mais complexas.

3. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DA NOSSA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos os resultados alcançados durante a nossa pesquisa aplicada com alunos do curso de Matemática, sobre a compreensão e o domínio dos conteúdos dos números racionais na resolução de problemas. Destacamos aqui, nosso sistema de avaliação/categorização das soluções construídas, os conteúdos e as habilidades que almejamos serem apresentados pelos alunos, bem como, as dificuldades dos alunos e seu desempenho na resolução dos problemas propostos.

Por fim, confrontaremos os resultados obtidos diante dos argumentos que foram apresentados no capítulo anterior.

3.1. AVALIAÇÃO E CATEGORIZAÇÃO DAS RESPOSTAS

Como já mencionado no Capítulo 1, não era nossa intenção nos atermos apenas ao número de acertos ou de erros, mas, principalmente, observarmos as estruturas de solução, o raciocínio utilizado e o nível de complexidade das respostas produzidas. Dessa forma, classificamos cada questão do nosso questionário de acordo com nosso sistema de avaliação, dividido em três possíveis categorias:

- Resposta Errada (RE) – Abrangem as situações em que os alunos não apresentaram nenhum conhecimento referente à representação, operacionalização e/ou estratégia de resolução do problema;
- Resposta Correta (RC) – Nesta categoria estão as respostas em que os alunos apresentaram conhecimento referente à representação dos números fracionários em suas mais distintas formas, à operacionalização e estratégias de resolução de problemas, além da tentativa de solução por caminhos alternativos, seguindo etapas de raciocínio lógico;
- Categoria Residual (CR) – Encontram-se nesta categoria, as questões não respondidas, respostas sem sentido ou incompletas e, também, as respostas que não se encaixam nas categorias definidas anteriormente.

3.2. ANÁLISE E RESULTADOS DA PESQUISA


Apresentamos, a seguir, cada um dos problemas propostos, bem como os conteúdos associados a eles, os quais apontamos como ferramenta para as resoluções dos problemas. Posteriormente, apresentamos os resultados obtidos na pesquisa, bem como sua classificação/categorização, que obedece aos aspectos citados anteriormente. Em seguida, apresentamos uma breve análise das estratégias levantadas pelos alunos e os principais tipos de erros cometidos pelos mesmos. Todos os resultados apresentados são condensados da análise das respostas dos participantes, em termos percentuais, considerando o total de 25 alunos.

3.2.1. A Questão 1

Figura 2: Questionário Investigativo (Questão 1)

1. Foi-nos apresentado o quadrado ao lado, com lados iguais a 8 unidades de comprimento.

- a) Qual a área da região clara?
- b) E a área da região escura?
- c) Qual a razão entre a área da região clara em relação à região escura?
- d) E qual a razão da área da região clara em relação à área total da figura?



Fonte: Elaborada pela autora, 2014

Nesta questão, esperávamos que os alunos apresentassem um conhecimento básico referente ao cálculo de área de regiões planas, além de conhecimentos referentes à representação fracionária da parte-todo, e o conceito de equivalência e simplificação de frações. Uma das estratégias que poderia ser utilizada pelos alunos seria a identificação da unidade de área e a contagem da quantidade de unidades brancas ou pretas (soma de unidades inteiras e de metades de unidades), subtraindo-se um desses totais da área do quadrado, que era igual a 64 unidades quadradas de comprimento.

3.2.1.1. Resultados Quantitativos da Questão 1

Tabela 1: Desempenho dos alunos na Questão 1

Questão	Acertos	Erros	Categoria Residual
1. a)	32%	20%	48%
1. b)	28%	24%	48%
1. c)	28%	20%	52%
1. d)	28%	20%	52%

Fonte: Elaborada pela autora, 2014

Como podemos observar na Tabela, na resposta à maioria dos itens, o índice de acerto foi próximo de apenas 30% do total.

3.2.1.2. Principais Estratégias Adotadas na Resolução da Questão 1

Nesta questão, como era de se esperar, obtivemos algumas respostas diretas, sem esboço de procedimento de resposta. Surpreendemo-nos com o grande número de respostas deixadas em branco (já que acreditávamos que a questão não envolvia um nível complexo de dificuldade), o que sugere uma possível fragilidade no repertório de estratégias dos alunos para resolver questões dessa natureza.

Dentre as respostas corretas, observamos que seis alunos dividiram a região do quadrado de lado $8u$ de comprimento, em 64 quadradinhos de área $1u^2$, e contaram as regiões compostas por quadradinhos brancos e as regiões compostas por triângulos de área $\frac{1}{2}u^2$. O resultado apresentado, em questão, foi a soma destas áreas: $15.1u^2 + 18.\frac{1}{2}u^2 = 24u^2$, o que respondia o item *a* da questão. A partir deste primeiro resultado, era subtraído seu valor da área total do quadrado maior ($64 u^2$), obtendo-se a área da região escura: $40u^2$, resposta correta do item *b* da questão.

As representações da razão entre as áreas clara e escura da figura, assim como da parte clara em relação à figura toda, foram feitas corretamente por todos os alunos que acertaram os dois itens iniciais da questão. Em alguns casos houve quem simplificasse as frações obtidas corretamente, mas nem sempre resultando em uma fração irredutível, ou seja, era indicada a

razão $\frac{12}{20}$, para o item c, no lugar de $\frac{24}{40}$, mas que ainda não representava o quociente na forma reduzida $\left(\frac{3}{5}\right)$.

Sobre a resolução desta questão, um (a) aluno (a) justificou seu procedimento da seguinte maneira: “*Para determinar a área das partes clara e escura, seccionei o quadrado em outros quadrados menores de lado 1u. A partir daí, somei aqueles que correspondiam à região clara, e depois somei os que correspondiam à região escura. Após isso, foi usado apenas o conhecimento de razão [...]*”.

3.2.1.3. Principais Tipos de Erros Cometidos na Questão 1

Os principais erros cometidos pelos alunos na resolução da primeira Questão do instrumento consistiram em:

- Supor que a região escura tivesse o dobro da área da região clara;
- Erro ao contar as unidades que compõem as regiões claras e escuras;
- Dificuldade para identificar a unidade de área utilizada na composição das partes claras e escuras da figura.

Observamos que, na tentativa de obter a área da região clara, um (a) aluno (a) tentou reproduzir um novo desenho, obtido através do encaixe das figuras claras, buscando construir quadrados ou retângulos, provavelmente pela facilidade em se calcular a área dessas regiões, entretanto, ele não respeitou as dimensões das figuras, confundindo o comprimento das bases e das alturas de algumas regiões e, conseqüentemente, errando a questão.

3.2.2. A Questão 2

Figura 3: Questionário Investigativo (Questão 2)

2. Uma empresa conta com 72 funcionários que trabalham cerca de 6 horas diariamente para manter a meta de produção. Para cortar gastos, a empresa demitiu $\frac{1}{3}$ dos funcionários que não mantinham um bom desempenho. Quantas horas, cada funcionário terá que passar a trabalhar para que a produção não caia?

Fonte: Elaborada pela autora, 2014

Na questão 2 esperávamos que os alunos apresentassem a capacidade de operar com números fracionários, observar e argumentar que a quantidade de trabalhadores é inversamente proporcional ao tempo de trabalho, aplicar regra de três ou algum outro procedimento equivalente para encontrar a resposta certa.

3.2.2.1. Resultados Quantitativos da Questão

Tabela 2: Desempenho dos alunos na Questão 2

Questão	Acertos	Erros	Categoria Residual
2	52%	40%	8%

Fonte: Elaborada pela autora, 2014

Como podemos observar, a partir dos valores apresentados na Tabela, cerca de metade dos alunos apresentou uma resposta correta para a questão. Em seguida destacamos quais as principais estratégias registradas por eles e os principais tipos de erro cometidos.

3.2.2.2. Principais Estratégias Adotadas na Resolução da Questão 2

Esta questão foi a que, dentre todas do Instrumento, apresentou um maior índice de tentativas de solução, ou seja, observamos baixo índice de instrumentos com a questão em branco ou com respostas incompletas ou não pertinentes ao que foi solicitado. Atribuímos isso ao fato de ser uma questão de enunciado simples e curto, o que sugere uma solução fácil.

Dentre as soluções corretas, destacamos as respostas dos alunos que as expressaram através do uso consciente de regra de três para grandezas inversamente proporcionais, quer seja denotando com a sigla IP (para grandezas Inversamente Proporcionais), quer seja pelo uso de setas (\updownarrow) em sentido contrário, que também são utilizadas para registrar grandezas desse tipo.

Em geral, os alunos que resolveram esta questão, adotando esse procedimento, obtiveram 9 (nove) horas como resposta. “*Resolvi esta questão utilizando conhecimentos de regra de três e grandezas inversamente proporcionais*”, relatou um (a) aluno (a) sobre seu procedimento.

Destacamos também, as estratégias dos alunos que resolveram esta questão sem mencionar ou perceber que as grandezas eram inversas: dois alunos calcularam o total de horas trabalhadas pelos 72 funcionários (432 horas) e distribuíram entre os 48 funcionários

restantes; dois alunos calcularam a quantidade de horas trabalhadas pelos 24 funcionários demitidos e distribuíram entre os 48 funcionários que permaneceram na empresa. Nesta última solução, os alunos observaram que esta quantidade de horas (3 horas), seria o tempo a mais que os 48 funcionários teriam que trabalhar e, por isso, somaram estas 3 horas à quantidade que cada um trabalha normalmente, 6 horas, obtendo 9 horas como resposta.

3.2.2.3. Principais Tipos de Erros Cometidos na Resolução da Questão 2

Os principais tipos de erros cometidos pelos alunos, ao responderem a questão 2, foram:

- Admitir que as grandezas envolvidas fossem diretamente proporcionais;
- Resolver o problema admitindo que um terço do total de funcionários fosse a quantidade de funcionários que permanecera na empresa e não a parte demitida do total.

Ou seja, os erros evidenciaram problemas quanto à interpretação do enunciado, apesar de o considerarmos simples e direto.

3.2.3. A Questão 3

Figura 4: Questionário Investigativo (Questão 3)

3. Um aluno interessado em saber quanto teria que se deslocar de sua casa até a universidade, decidiu olhar no Google Maps a sua rota. De acordo com o mapa, a distância gráfica entre os dois pontos (de saída e de chegada) é de 3cm. Sabendo que a escala do mapa é de 1:1.200.000, responda:
- a) Qual é a distância real (em quilômetros) entre os dois pontos?
 - b) Quanto tempo (em minutos) o aluno deverá gastar para chegar ao seu destino, viajando a 72km/h?

Fonte: Elaborada pela autora, 2014

Em relação a essa questão, esperávamos que os alunos associassem as escalas do mapa ao conceito de razão e que, respeitando as grandezas métricas envolvidas, pudessem determinar a solução do problema. Almejávamos também, que o aluno fosse capaz de relacionar o conceito de velocidade à razão deslocamento/tempo.

3.2.3.1. Resultados Quantitativos da Questão 3

Tabela 3: Desempenho dos alunos na Questão 3

Questão	Acertos	Erros	Categoria Residual
3. a)	32%	40%	28%
3. b)	32%	40%	28%

Fonte: Elaborada pela autora, 2014

Como se pode observar pelos dados apresentados na Tabela 3, apenas cerca de um terço dos alunos respondeu corretamente a questão, o que correspondeu a quase o mesmo número de alunos que não a respondeu ou que registrou cálculos incompletos como solução.

3.2.3.2. Principais Estratégias Adotadas na Resolução da Questão 3

Dentre os alunos que resolveram o item *a* desta questão corretamente, a maioria utilizou-se de regra de três para relacionar as medidas e não apresentaram problemas para trabalhar com as escalas métricas. Conseguiram observar que as escalas do mapa são representadas em centímetros e fizeram a conversão de unidades corretamente.

Além disso, dois alunos conseguiram relacionar os conceitos envolvidos através da seguinte relação: $Escala = \frac{Distância\ Real}{Distância\ no\ mapa}$, comumente vista nas aulas de Geografia, nos estudos sobre cartografia. Sobre este procedimento temos a seguinte explicação: “*Sabendo a relação (razão) entre o valor no mapa e na escala, usei regra de três para determinar a distância real em cm, e, após isso, fiz a conversão de unidades, de centímetros para quilômetros*”.

Todos que resolverem o item *a* anterior não apresentaram dificuldades em responder o item seguinte. Alguns alunos resolveram de modo análogo ao anterior (através do uso de regra de três), outros notaram que o trajeto de 36 km correspondia à metade de 72 km e, por essa razão, o trajeto demandaria a metade de uma hora (30 minutos).

Dois alunos observaram que o item *b* da questão proposta obedecia a seguinte relação da Física: $Velocidade_{média} = \frac{Deslocamento}{Tempo}$. Vale salientar que todos estes procedimentos obedeceram às unidades de medida/tempo.

3.2.3.3. Principais Tipos de Erros Cometidos na Resolução da Questão 3

Os principais tipos de erros apresentados pelos alunos, ao tentarem resolver a Questão 3, foram:

- Erro na conversão das unidades;
- Admitir que as escalas dadas no mapa fossem em unidades de metro;
- Supor que a terça parte de $1.200.000\text{cm}$ fosse a distância procurada.

O erro de conversão das unidades foi o mais comum, registrando-se casos em que o aluno afirmava que $1.200.000\text{ cm}$ equivalia a 120 km , ou era igual a 1.200 km em vez de 12 km .

3.2.4. A Questão 4

Figura 5: Questionário Investigativo (Questão 4)

4. Em uma turma de ensino superior, $\frac{1}{12}$ da turma desistiu do curso, $\frac{6}{6}$ trancaram, $\frac{1}{6}$ da turma desblocou e 3 mudaram de área. Sabendo que $\frac{3}{5}$ da turma concluíram o curso no devido tempo, responda?

a) Quantos alunos tinham na turma, no início?

b) Quantos concluíram no tempo devido?

Fonte: Elaborada pela autora, 2014

A proposta desta questão era que os alunos pudessem expressar os conceitos parte-todo na forma algébrica. Esperávamos que, na solução da questão, os alunos representassem as partes $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{3}{5}$ como partes de um todo x , e, além de uma solução envolvendo equações com frações algébricas, esperávamos encontrar também respostas através do método tentativa/erro.

3.2.4.1. Resultados Quantitativos da Questão 4

Tabela 4: Desempenho dos alunos na Questão 4

Questão	Acertos	Erros	Categoria Residual
4. a)	20%	36%	44%
4. b)	12%	40%	48%

Fonte: Elaborada pela autora, 2014

Como esperávamos, esta questão foi a que teve o menor índice de acertos, em particular, o item *b* da questão, bem como um dos maiores índices entre as respostas que se enquadraram na Categoria Residual. Prevíamos esse resultado, pois, em geral, os alunos não estão habituados a resolverem situações como esta nos ensinos Fundamental e Médio. A maioria dos alunos está habituada a resolver cálculos que já se encontram em sua forma algébrica, aos quais, em geral, não atribuem significado, mas não são confrontados com problemas em que tenham que representar os valores algebricamente. (RÊGO, 2009)

Acreditamos que se a questão tivesse sido apresentada em sua forma algébrica, muito provavelmente, a quantidade de acertos teria sido maior. O fato de abordarmos esta situação matemática na forma de um problema contribuiu diretamente para a dificuldade dos alunos em resolvê-lo.

3.2.4.2. Principais Estratégias Adotadas na Resolução da Questão 4

Entre os cinco alunos que resolveram esta questão corretamente, a representação algébrica ocorreu adequadamente e as operações apresentadas que envolviam adição e subtração de frações de denominadores diferentes, resolvidas por meio do cálculo do Mínimo Múltiplo Comum (MMC), foram resolvidas corretamente. Nenhum aluno, entre os que acertaram ou que erraram, tentou resolver este problema através do método de tentativa e erro.

3.2.4.3. Principais Tipos de Erros Cometidos na Resolução da Questão 4

Os principais erros observados na resolução da Questão 4, foram:

- Supor que a quantidade de alunos da turma fosse equivalente a somar $\frac{1}{12}, 6, \frac{1}{6}, 3$ e $\frac{3}{5}$;

- Representar $\frac{1}{12}, \frac{1}{6}$ e $\frac{3}{5}$ como partes de x , como um todo, mas não expressar a equação de frações algébricas como uma soma de todos os valores envolvidos, em uma igualdade.

Observamos que um (a) aluno (a) resolveu o problema corretamente, admitindo x como o total de alunos, mas ao concluir o problema afirmou que 60 era a quantidade de alunos que haviam concluído o curso no devido tempo e não a quantidade de alunos no início da turma, como o problema sugere. O aluno em questão demonstra, dessa forma, não compreender o problema em todos os seus níveis.

3.2.5. A Questão 5

Figura 6: Questionário Investigativo (Questão 5)

5. Segundo um relatório da OIT (Organização Internacional do Trabalho), o número de desempregados no mundo totaliza 202 milhões de pessoas (uma taxa de 6% em relação à população economicamente ativa), destes, 36,9% são jovens com menos de 25 anos.

O motivo: além da geração de emprego fraca e do crescente aumento de desemprego, milhões de pessoas abandonaram o mercado de trabalho desde o início da crise financeira mundial, em 2008.

Disponível em: <http://economia.uol.com.br/noticias/bbc/2014/01/20/brasil-continuara-com-desemprego-acima-de-media-global-ate-2016-diz-oit.htm>

(adaptado).

- a) Quantos são os jovens desempregados atualmente?
- b) Segundo as tendências atuais, o desemprego mundial deverá se agravar, chegando a ultrapassar 215 milhões de desempregados em 2018, isso significa um aumento percentual de quanto em relação à taxa de desemprego atual?

Fonte: Elaborada pela autora, 2014

Na última Questão de nosso Instrumento de Pesquisa, apresentamos dados referentes à taxa de desempregos, em uma questão em que esperávamos que os alunos apresentassem uma interpretação textual adequada e capacidade de operar com porcentagem. Os resultados quantitativos estão expressos na Tabela 5.

3.2.5.1. Resultados Quantitativos da Questão 5

Tabela 5: Desempenho dos alunos na Questão 5

Questão	Acertos	Erros	Categoria Residual
5. a)	64%	12%	24%
5. b)	20%	44%	36%

Fonte: Elaborada pela autora, 2014

3.2.5.2. Principais Estratégias Adotadas na Resolução da Questão 5

Esta questão foi a que teve o maior índice de acertos, o que nos leva a concluir que os alunos pesquisados demonstraram estar bastante habituados com o conceito de porcentagem, bem como com sua representação fracionária e com o cálculo envolvendo esse conceito.

As respostas dos alunos ao item *a*, podem ser divididas entre as que foram resolvidas através de regra de três e as que foram resolvidas diretamente escrevendo 36,9% na forma $\frac{36,9}{100}$ e multiplicando por 202 milhões.

Os alunos propuseram uma solução para o item *b*, valendo-se das mesmas estratégias do item anterior, mas, apesar de simples, este item da questão não manteve o mesmo número de acertos do item *a*.

3.2.5.3. Principais Tipos de Erros Cometidos na Resolução da Questão 5

Os principais erros observados na resolução da Questão 5, foram:

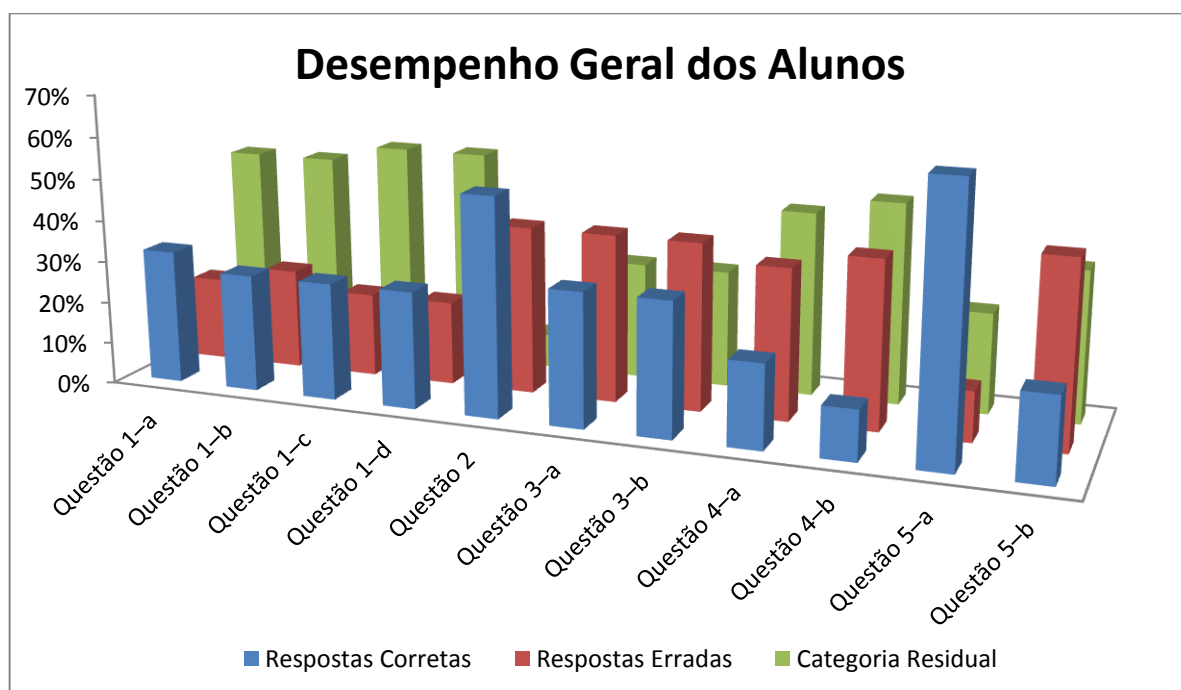
- Erro ao escrever o número 202.000.000 (zeros a menos ou a mais);
- Supor que 202 milhões representavam 6% do total de jovens desempregados;
- Tomar 215 milhões como 100% dos desempregados e concluir que o aumento em relação aos 202 milhões tivesse sido de aproximadamente 94%.

Sobre esta última estratégia, os alunos não consideraram que tomando 202 milhões ou 215 milhões como 100% do total de desempregados, o aumento percentual seria dado pela diferença entre o maior e o menor percentual obtido.

3.3. CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O CONJUNTO DE QUESTÕES DO INSTRUMENTO

Para efeito de comparação, fizemos a Gráfico 1, com os percentuais das três categorias de respostas, para cada questão. Nele, podemos verificar o percentual de respostas classificadas segundo nosso sistema de categorização, e, dessa forma, podemos ter uma estimativa geral do desempenho dos alunos, tanto em cada uma das questões propostas, quanto comparando os resultados nelas obtidos.

Figura 7: Gráfico do Desempenho Geral dos Alunos



Fonte: Elaborada pela autora, 2014

Analisando os resultados obtidos, podemos perceber que, embora as estratégias levantadas pelos alunos estejam em consonância com os objetivos e com os conteúdos listados pelos PCN em nosso Capítulo Teórico, estes resultados não são considerados bons indicadores.

Considerando que o instrumento de coleta de dados foi elaborado com questões de nível fácil a médio, as quais exploravam os objetivos curriculares do Ensino Fundamental, em relação à aprendizagem de frações, concluimos que os resultados dos alunos mostram um desempenho muito abaixo do esperado.

Em geral, muitas respostas foram deixadas em branco, o que, além de supor uma falta de interesse destes jovens matemáticos em resolver problemas que lhes são lançados, pode indicar também a falta de compreensão dos problemas propostos ou até mesmo a incapacidade de lidar com eles.

Em relação aos erros cometidos, no que tange à Teoria dos Campos Conceituais, não observamos nenhum erro de operação quanto às estruturas aditivas e multiplicativas. Entretanto, diversas falhas conceituais foram identificadas, como, por exemplo, não saber distinguir entre grandezas direta e indiretamente proporcionais; não saber lidar com escalas métricas (grandezas representadas na forma $a:b$, diferentemente do habitual $\frac{a}{b}$); incapacidade de representar ou de discutir os resultados encontrados por meio da algebrização de números fracionários; dificuldades em compreender os conceitos envolvidos na porcentagem.

Analizando separadamente a questão 5 do nosso Instrumento, notamos que o item a apresenta um elevado índice de acertos (o maior entre todas as questões), mas o mesmo não ocorre ao item b . Considerando-se que o método de resolução de ambos os itens, a e b , quase não diferem, e que, o índice de acertos no item a foi muito superior ao do item b , somos levados a crer que os alunos resolveram estes problemas sem compreender os aspectos matemáticos que estavam envolvidos.

Sobre este fato, os PCN defendem que resolver um problema não significa, necessariamente, limitar-se a compreendê-lo e aplicar procedimentos adequados para se obter uma resposta correta. Nesse sentido, uma resposta correta pode ser aceitável, mas nem sempre pode ser uma garantia da aprendizagem. Resolver um problema efetivamente implica desenvolver habilidades e estratégias que permitam provar seus resultados, testar suas aplicações e comparar diferentes soluções. Dessa forma, a resposta correta cede lugar aos processos de solução envolvidos. (BRASIL, 1998).

Em suma, os resultados desta pesquisa vêm externar uma situação que merece ser alvo de reflexões, no que compete à aprendizagem dos números fracionários, em especial, considerando que os sujeitos pesquisados são alunos do curso de Licenciatura e Bacharelado de Matemática, e representam um universo expressivo dos alunos recém ingressos no curso. Espera-se que além do interesse por Matemática, os alunos deste curso, muitos dos quais provavelmente irão desempenhar o papel de professores, possuam pleno domínio dos conteúdos básicos e a faculdade de lidar com problemas de mesma natureza dos aqui apresentados.

A constatação das fragilidades observadas demanda reflexão por parte dos responsáveis pela formação inicial desses futuros professores, considerando medidas que precisam ser tomadas para suprir as deficiências destes alunos, uma vez que a atual estrutura curricular do curso de Matemática não oferece disciplinas em que este conteúdo seja trabalhado e tais fragilidades de formação possam ser superadas. Nossa preocupação é que estes futuros professores possam levar para a sala de aula deficiências de formação, destoantes com o exigido atualmente em nosso sistema de ensino, contribuindo para a manutenção da baixa qualidade que se observa hoje em nossa Educação Básica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com relação aos resultados, acreditávamos, em um primeiro instante, que os sujeitos pesquisados pudessem resolver os problemas propostos sem muitas dificuldades. Porém, analisando o desempenho dos mesmos, observamos que este não condiz com o pleno domínio dos conceitos dos números fracionários enfatizados pelos PCN nem, tão pouco, com o nível educacional esperado para os participantes da pesquisa.

Almejamos que os resultados aqui apresentados contribuam para a reflexão acerca da necessidade de melhoria do ensino de Matemática não apenas nas séries iniciais ou finais do Ensino Fundamental, nas quais o aluno estuda o conteúdo que elegemos como foco, mas, também, motivem a reflexão acerca da formação inicial dos futuros professores e pesquisadores de Matemática pelos quais nossa instituição é responsável. Nossa expectativa é que os alunos pesquisados possam consolidar seus conceitos sobre números fracionários, porém, sem a devida orientação, isso pode não ocorrer.

Com relação à sequência desta pesquisa, entendemos que as diversas indagações que surgiram no processo, possam e devam ser tomadas como objeto de investigação complementar da nossa pesquisa, que se deu em um caráter exploratório e inicial acerca da abordagem da temática.

Como perspectiva de trabalhos futuros, podemos delimitar, por exemplo, a investigação de como eles lidam com essas dificuldades ao longo de sua formação superior e se elas são devidamente sanadas; ou investigar outras dificuldades/deficiências dos alunos do curso de Matemática; ou investigar como os professores lidam com tais dificuldades e se eles dão a devida importância à gravidade deste assunto; ou, ainda, analisar a possibilidade da inserção de uma disciplina de pré-cálculo que possa dar suporte a estes alunos.

REFERÊNCIAS

BELLOS, Alex. **Alex no País dos Números**. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Básica**. Brasília: Ministério da Educação e Cultura, 1996.

BRAVO, Carla Luciane Viero; SOARES, Maria Arlita da Silveira. Os números racionais na representação fracionária: Um estudo de caso com alunos do 6º ano. In: **II Congresso Nacional de Educação Matemática**. Ijuí, 2011.

COSTA, Manuel Amoroso. **As Idéias Fundamentais da Matemática**. São Paulo: Grijalbo, 1971.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2004.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas**. São Paulo: Ática, 2007.

DANTZIG, Tobias. **Número: A Linguagem da Ciência**. 4. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 4. ed rev. e ampl. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

JEZINE, Edineide. Metodologia do Trabalho Científico. In: Antonio Sales da Silva. (Org.). **Licenciatura em Matemática a Distância**. 1. ed. João Pessoa: Linceu, 2007, v. 01, p. 49-93.

MACHADO, Cacilda Tenório Oliveira; MENEZES, Josinalva Estácio. A Construção do Conceito de Equivalência de Frações numa Abordagem Significativa: uma contribuição da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. In: **Anais do SIPEMAT**. Recife, 2006, 9p.

MAGINA, Sandra; CAMPOS, Tânia. **A Fração nas Perspectivas do Professor e do Aluno dos Dois Primeiros Ciclos do Ensino Fundamental**. São Paulo: Boletim de Educação Matemática, vol. 21, núm. 31, 2008, pp. 23-40.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e Investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. Ed. rev. e aum. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MOREIRA, Marco Antonio. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área**. Porto Alegre: Investigações em Ensino de Ciências – V7(1), pp. 7-29, 2002.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

RÊGO, Rogéria Gaudencio. **Tópicos Especiais em Matemática II**. In: Eufrásio de Andrade Lima Neto. (Org.). Licenciatura em Matemática a Distância. 01ed. João Pessoa: Editora Universitária UFPB, 2009, v. 5, p. 253-292

RIBEIRO, Simone Carvalho. **A abordagem do conceito dos números racionais referente aos seus significados em livros didáticos do 4º ano do ensino fundamental**. Monografia de Especialização – ESAB. Vila Velha, 2010.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SILVA, Maria José Ferreira da. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. Dissertação de mestrado – PUC. São Paulo, 1997.

ZANELLA, Marli Schmitt. et al. Um estudo teórico de problemas da estrutura aditiva de números racionais na representação fracionária. In: **ANAIS DO XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – ISSN 2178-034X**. Curitiba, 2013.